



Paula Reichert, Tamas Makai

Wintersemester 2025/26

Lineare Algebra (Informatik) Wiederholungsblatt

Aufgabe 1

- (i) Bestimmen Sie $ggT(19, 43)$ und die Kettenbruchdarstellung von $\frac{43}{19}$.
- (ii) Sei Ω eine Grundmenge und $A, B \subseteq \Omega$. Zeigen Sie: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- (iii) Bestimmen Sie den Realteil und die Polardarstellung von $w := \frac{\bar{z}}{1+z^2}$, wobei $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
- (iv) Betrachten Sie die beiden Permutationen $f : A \rightarrow A, k \mapsto f(k)$ und $g : A \rightarrow A, j \mapsto g(j)$ mit $A := \{1, 2, 3, 4\}$

$$f : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{Bmatrix}, \quad g : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$$

Bestimmen Sie $f \circ g$ und g^{-1} .

Lösung 1

- (i) Euklidischer Algorithmus:

$$43 = 2 \cdot 19 + 5$$

$$19 = 3 \cdot 5 + 4$$

$$5 = 1 \cdot 4 + 1$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0$$

Also ist $ggT(19, 43) = 1$.

Kettenbruchdarstellung kann man aus dem euklidischen Algorithmus auch ablesen:

$$\frac{43}{19} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}$$

- (ii) Sei $x \in \Omega$.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\iff \neg(x \in A \cap B) \\ &\iff \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\stackrel{(*)}{\iff} \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \\ &\iff x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\iff x \in (A^c \cup B^c) \end{aligned}$$

wobei $(*)$ mit folgender Wahrheitstafel gezeigt wird:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

(iii) Wenn $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, dann sind

$$\bar{z} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{und}$$

$$z^2 = \frac{(1+i)^2}{\sqrt{2}^2} = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

Also ist

$$\begin{aligned}
w &= \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1+i} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-i}{1+i} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1-i)(1+i)}{(1+i)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{2i} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot i} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-i) \quad (\text{insbes. } \operatorname{Re}(w) = 0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{3}{2}\pi i} \quad (\text{Polardarstellung})
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
f \circ g &: \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(g(1)) & f(g(2)) & f(g(3)) & f(g(4)) \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(4) & f(3) & f(1) & f(2) \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right\} \\
g^{-1} &: \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g^{-1}(1) & g^{-1}(2) & g^{-1}(3) & g^{-1}(4) \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{cccc} g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

- (i) Geben Sie die Verknüpfungstafel der Multiplikation für $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ an. Welche Lösungen haben die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

a) $2z = 1$

b) $z^2 = 2$

Begründen Sie Ihre Antwort.

- (ii) Ist die Menge $M = \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ Untervektorraum des Vektorraums der Abbildungen $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Geben Sie ein Beispiel für ein Element $g \in M$ an.

- (iii) Untersuchen Sie die beiden folgenden Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf Linearität. Untersuchen Sie alle linearen Abbildungen auf Surjektivität und Injektivität.

a) $f_1(x, y) = (3x + 2y, 4x + y)$

b) $f_2(x, y) = (7x + 14y - 1, x + 2y + 5)$

Lösung 2

- (i) Die Multiplikationstabelle für $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ lautet

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Also können wir daraus ablesen, dass

a) $2z = 1 \iff z = 2$ (letzte Spalte), und

b) $z^2 = 2$ von keinem $z \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ erfüllt wird (Diagonaleinträge).

- (ii) Ja: Seien $f, g \in M, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \quad (\text{Definition von } f + g) \\ &= -f(-x) + (-g(-x)) \quad (\text{weil } f, g \in M) \\ &= -(f(-x) + g(-x)) \\ &= -(f + g)(-x) \quad (\text{Definition von } f + g)\end{aligned}$$

also ist $f + g \in M$.

$$\begin{aligned}(\lambda f)(x) &= \lambda \cdot f(x) \quad (\text{Definition von } \lambda f) \\ &= \lambda(-f(-x)) \quad (\text{weil } f \in M) \\ &= -(\lambda \cdot f(-x)) \\ &= -(\lambda f)(-x)\end{aligned}$$

also ist auch $\lambda f \in M$.

Eine Abbildung in M ist zum Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x$.

- (iii) a) f_1 ist linear: Seien $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}f_1(\lambda(x, y) + (x', y')) &= f_1(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (3(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), 4(\lambda x + x') + \lambda y + y') \\ &= (3\lambda x + 3x' + 2\lambda y + 2y', 4\lambda x + 4x' + \lambda y + y')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (3\lambda x + 2\lambda y, 4\lambda x + \lambda y) + (3x' + 2y', 4x' + y') \\
&= (\lambda(3x + 2y), \lambda(4x + y)) + (3x' + 2y', 4x' + y') \\
&= \lambda(3x + 2y, 4x + y) + (3x' + 2y', 4x' + y') \\
&= \lambda f_1(x, y) + f_1(x', y').
\end{aligned}$$

f_1 ist injektiv, weil $\text{Kern}(f_1) = \{(0, 0)\}$: $f(x, y) = (0, 0)$, falls

$$3x + 2y = 0 \quad (\text{I})$$

$$4x + y = 0 \quad (\text{II})$$

(I) - 2(II) : $-5x = 0 \implies x = 0$. Setzen wir $x = 0$ in (II), so folgern wir, dass auch $y = 0$.

f_1 ist auch surjektiv, weil wir zeigen können, dass jedes $(z, w) \in \mathbb{R}^2$ im Bild von f liegt: Sei $(z, w) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. $(z, w) \in \text{Bild}(f)$, falls

$$3x + 2y = z \quad (\text{I}')$$

$$4x + y = w \quad (\text{II}')$$

(I') - 2(II') : $-5x = z - 2w \implies x = \frac{2w-z}{5}$. Setzen wir dies in (II'), bekommen wir $y = w - 4\frac{2w-z}{5}$. Also ist $(z, w) = f_1(\frac{2w-z}{5}, -\frac{3w-4z}{5})$.

(Bemerkung: Surjektivität folgt auch direkt aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen.)

b) f_2 ist nicht linear, weil $f_2(0, 0) = (-1, 5) \neq (0, 0)$.

Aufgabe 3

(i) Betrachten Sie den Vektorraum der quadratischen Polynome

$$P_2(\mathbb{R}) = \{P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Betrachten Sie die Polynome $P', P'' \in P_2(\mathbb{R})$ gegeben durch $P' := x^2$ und $P'' := 3x - 1$. Ist $\mathcal{B} := \{P', P''\}$ eine Basis von $P_2(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ definiert durch $(A)_{ij} := a_{ij} = 1 - \frac{\delta_{ij}}{2}$, wobei δ_{ij} die Kronecker-Delta-Funktion ist, für die gilt: $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j$, und 0 sonst. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\sum_{j=1}^5 a_{1j} a_{2j}$

b) $\sum_{j=1}^7 a_{1j} a_{j2}$

Berechnen Sie alle a_{ij} und schreiben Sie damit die Matrix A auf.

Lösung 3

(i) Nein, $\mathcal{B}$ ist keine Basis von $P_2(\mathbb{R})$, da sie kein Erzeugendensystem ist: Das Polynom $P = 1$ lässt sich nicht als Linearkombination von P' und P'' schreiben, denn

$$1 = \lambda x^2 + 3\mu x - \mu$$

ist nicht lösbar (μ müsste gleichzeitig 0 und -1 sein).

(ii) Seien $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $y = 1$; alle Einträge der Matrix A sind entweder x oder y . Genauer:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^5 a_{1j}a_{2j} &= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} + a_{14}a_{24} + a_{15}a_{25} \\
&= 2xy + 3y^2 \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 = 4
\end{aligned}$$

b) $\sum_{j=1}^7 a_{1j}a_{j2} = \sum_{j=1}^7 a_{1j}a_{2j}$, da $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ und somit $a_{2j} = a_{j2}$ für alle $j \in \{1, \dots, 7\}$. Also

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^7 a_{1j}a_{j2} &= \sum_{j=1}^5 a_{1j}a_{2j} + a_{16}a_{62} + a_{17}a_{72} \\
&\stackrel{\text{a)}}{=} 4 + 1 + 1 = 6
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

- (i) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix, für die gelte: $\exists k \in \mathbb{N} : A^k = 0$, wobei $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-mal}}$ das k -fache Matrixprodukt ist. Zeigen Sie, dass die inverse Matrix von $(E_n - A)$ durch $E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l$ gegeben ist.
- (ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $(A \cdot A^T)$ und $(A \cdot A^T)^{-1}$.

Lösung 4

- (i) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$. Wir zeigen, dass

$$\begin{aligned}
(E_n - A)(E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l) &= E_n \\
(E_n - A)(E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l) &= E_n^2 + E_n \sum_{l=1}^{k-1} A^l - A E_n - A \sum_{l=1}^{k-1} A^l \quad (\text{Distributivgesetz}) \\
&= E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l - A^1 - \sum_{l=2}^k A^l \\
&= E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l - \sum_{l=1}^k A^l \\
&= E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l - \sum_{l=1}^{k-1} A^l + A^k \\
&= E_n
\end{aligned}$$

- (ii) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$, also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

(Diese Matrix ist nicht invertierbar, da $1 \cdot 9 - (-3) \cdot (-3) = 0$.)